

GIRO DELLA MORTE PER UN CORPO CHE SCIVOLA

Il «giro della morte» è una delle parti più eccitanti di una corsa sulle **montagne russe**. Per analizzare come è possibile che i carrelli seguano la rotaia «a testa in giù» senza cadere, modellizziamo la situazione nella maniera più semplice possibile.

Consideriamo quindi una guida rigida come quella della **figura 1**, su cui un punto materiale di massa m scivola senza attrito e ci chiediamo qual è la minima altezza h da cui il corpo deve essere lasciato cadere per fare in modo che esso superi senza problemi il giro della morte.

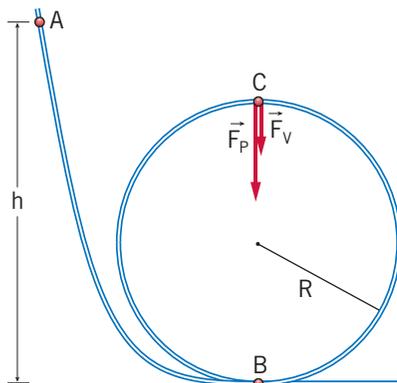


Figura 1 Un punto materiale è lasciato cadere dal punto A e, scivolando senza attrito, deve completare il giro della morte.

Indichiamo con R il raggio della traiettoria circolare descritta dal punto materiale durante il giro della morte e con h il dislivello tra il punto più alto (A) e quello più basso (B) dell'intero percorso.

Analisi del passaggio per il culmine del giro della morte

Il momento critico da esaminare è il passaggio per il punto C , alla quota massima del giro della morte. Se consideriamo un arco di circonferenza molto piccolo che ha il punto medio in C , possiamo pensare che il punto materiale percorra questo piccolo arco con un moto circolare uniforme con velocità di modulo v .

Come mostra la **figura 1**, quando un oggetto si trova in quel punto, su di esso agiscono due forze. Esse sono il peso $\vec{F}_p = m\vec{g}$ del corpo stesso e la forza vincolare \vec{F}_v esercitata dalla guida rigida sul corpo in movimento. È questa la forza che costringe il corpo a seguire la forma della pista circolare.

Visto che entrambe le forze sono verticali e rivolte verso il basso, anche la forza totale $\vec{F}_p + \vec{F}_v$ ha le stesse proprietà. Questo significa che $\vec{F}_p + \vec{F}_v$ è rivolta verso il centro della traiettoria circolare e quindi svolge il ruolo di forza centripeta \vec{F}_c che rende possibile il moto circolare uniforme del punto materiale in prossimità di C . Possiamo quindi scrivere

$$\vec{F}_c = \vec{F}_p + \vec{F}_v \quad (1)$$

e, visto che le tre forze hanno la stessa direzione e lo stesso verso, la relazione tra i loro moduli è

$$F_c = mg + F_v. \quad (2)$$

Per la formula (21) del capitolo «Le forze e i moti», vale la relazione

$$F_c = m \frac{v^2}{R},$$

per cui la formula (2) diventa

$$m \frac{v^2}{R} = mg + F_v. \quad (3)$$

Alla minima quota h di partenza corrisponde il valore più piccolo possibile della velocità v del punto materiale in C .

Ciò equivale a cercare il minimo valore possibile di F_c ; la formula (2) mostra allora che, visto che il valore di mg è fisso, ciò avviene quando F_v è uguale a zero. Ciò accade quando il punto materiale segue la traiettoria del giro della morte per effetto soltanto del proprio peso, senza «premere» sulla pista circolare.

Quindi la velocità minima per il completamento del giro della morte nella sua parte sommitale è data dalla relazione

$$m \frac{v^2}{R} = mg, \quad (4)$$

da cui si ottiene

$$v^2 = gR \quad (5)$$

Calcolo della quota di partenza

Dalla relazione (5) si ricava che l'energia cinetica posseduta dal punto materiale nel punto C è

$$K_2 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mgR, \quad (6)$$

mentre la sua energia cinetica nel punto A , quando è lasciato cadere da fermo, vale $K_1 = 0$ J.

Ora scegliamo come livello zero dell'energia potenziale della forza-peso la quota a cui si trova il punto B . Allora:

- l'energia potenziale iniziale del corpo (in A) è $U_1 = mgh$ e
- la sua energia potenziale nel punto C vale $U_2 = mg \times (2R) = 2mgR$.

Come si è detto all'inizio, si suppone che il punto materiale si muova senza attrito (con la guida rigida e con l'aria); quindi l'energia meccanica si conserva e vale la relazione

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2. \quad (7)$$

Sostituendo nella (7) i valori individuati in precedenza si ottiene allora la relazione

$$mgh = 2mgR + \frac{1}{2}mgR$$

da cui, dividendo entrambi i membri per il prodotto mg , si ottiene la relazione cercata:

$$h = \frac{5}{2}R \quad (8)$$

ESERCIZI

DOMANDE SUI CONCETTI

1 ★★★ Un carrello scivola praticamente senza attrito su una pista che contiene un giro della morte di raggio $R = 1,2$ m.

► Calcola la minima altezza h da cui il carrello deve partire per completare il giro della morte.

[3,0 m]

2 ★★★ La rampa di discesa di una pista ha un'altezza massima di 83 cm rispetto al livello del suolo.

► Calcola il massimo raggio di un giro della morte che può essere inserito (a partire dalla base della discesa) in modo che venga completato correttamente.

[33 cm]

3 ★★★ La parte circolare di un giro della morte ha un raggio di 2,6 m. Esso fa parte di una pista su cui un carrello può scivolare praticamente senza attrito.

► Determina qual è la minima altezza da cui il carrello deve partire per completare il giro della morte e qual è la sua velocità nel punto più alto del giro stesso.

[6,5 m, 5,0 m/s]

4 ★★★ Un carrello che ha una massa di 120 g scivola senza attrito su una pista che forma un giro della morte il cui diametro misura 68,2 cm. La quota da cui è lasciato partire il carrello si trova 95,5 cm al di sopra del punto più basso del giro della morte.

► Calcola il valore della velocità del carrello nel punto più alto del giro della morte e il modulo della reazione vincolare che la pista esercita sul carrello in tale punto. (Utilizza il valore $g = 9,80$ m/s².)

[2,31 m/s, 0,70 N]