GIRO DELLA MORTE PER UN CORPO CHE ROTOLA

Nell'approfondimento «Giro della morte per un corpo che scivola» si esamina il comportamento di un punto materiale che supera il giro della morte scivolando senza attrito su una pista rigida.

Conoscendo ora il momento d'inerzia e l'energia cinetica di rotazione di un corpo rigido, possiamo migliorare questa modellizzazione sostituendo il punto materiale con un corpo rigido (di profilo circolare, come una sfera o un cilindro) che rotola.

Ancora una volta, vogliamo determinare la minima quota da cui l'oggetto deve essere lasciato partire perché possa completare il giro della morte.

Il moto di rotolamento puro

Come è mostrato nella **figura 1**, nel moto di rotolamento il corpo ruota con velocità angolare ω attorno al punto di contatto *M*, che è istantaneamente fermo.

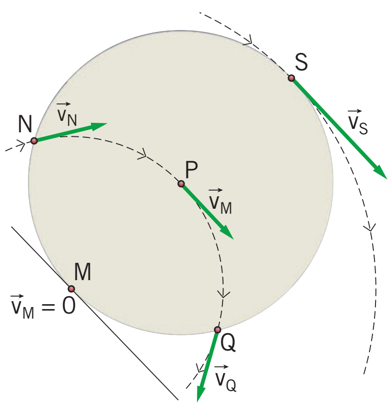


Figura 1 Il corpo rigido di raggio *R* ruota attorno al punto di contatto *M*, che è istantaneamente fermo.

Quindi, nel moto di rotolamento è indispensabile che ci sia attrito tra la guida rigida su cui avviene il moto e l'oggetto che rotola, in modo che il punto *M* della **figura 1** sia il centro di rotazione. Nonostante ciò, se il punto *M* non striscia, il suo spostamento parallelo alla guida è nullo e quindi la forza di attrito in *M* non compie lavoro. Così:

> nel moto di **rotolamento puro**, in cui il corpo rigido ruota attorno al punto di contatto senza strisciare, l'energia meccanica del sistema si conserva.

I punti *N*, *P* e *Q* della figura 1 hanno una distanza da *M* pari al raggio *r* del corpo rigido; così, il modulo *v* della loro velocità è

$$v = v_N = v_P = v_Q = \omega r. \tag{1}$$

Il punto *S* è a distanza 2*r* da *M* e quindi il modulo della sua velocità è

$$v_S = 2r\omega = 2v. \tag{2}$$

Descrizione alternativa del rotolamento puro

Per l'analisi dei moti di rotolamento è spesso conveniente utilizzare il seguente risultato:

> il moto di rotolamento puro è la sovrapposizione del moto di traslazione del baricentro del corpo rigido e del moto di rotazione del corpo stesso, con velocità angolare ω, attorno al suo baricentro.

Nota che la velocità angolare ω del moto di rotazione attorno al baricentro è la stessa del moto di rotolamento attorno a M. Di conseguenza, in tale moto il valore della velocità dei punti che si trovano si bordi del corpo rigido è

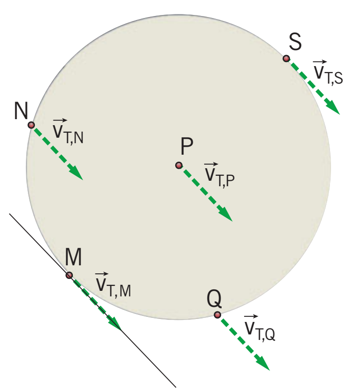
$$v_{R,M} = v_{R,N} = v_{R,Q} = v_{R,S} = \omega r = v. \tag{3}$$

Inoltre il vettore velocità di traslazione del baricentro, che indichiamo con $\vec{v}_T$, è uguale alla velocità $\vec{v}_P$ che tale punto possiede nel moto di rotolamento. Quindi vale l'ulteriore relazione

$$v_T = v_P = \omega r = v. \tag{4}$$

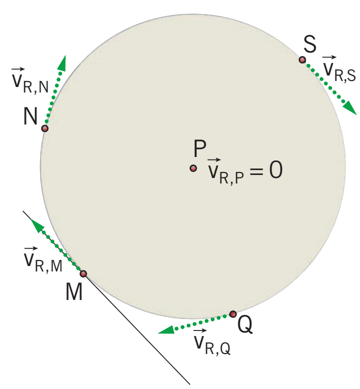
Per controllare le affermazioni precedenti:

▶ consideriamo nei punti M, N, P, Q e S i vettori velocità generati dalla traslazione, che sono paralleli tra loro e di modulo v.



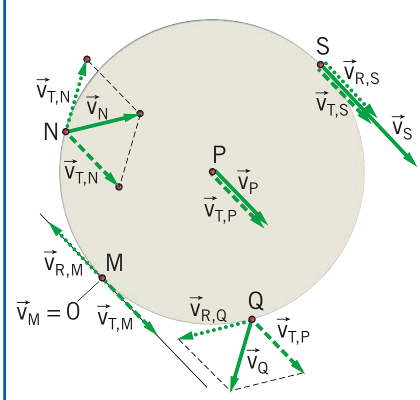
A

▶ Identifichiamo, negli stessi punti, i vettori velocità dovuti alla rotazione attorno a P; sul bordo, anche questi vettori hanno modulo v.



B

▶ In ogni punto, la somma del vettore velocità di traslazione e di quella di rotazione fornisce la velocità di rotolamento della figura 1.



C

Il giro della morte del corpo che rotola

Nella **figura 2** la linea tratteggiata indica la traiettoria seguita, in un giro della morte, dal baricentro P di un corpo rigido di massa m che è lasciato cadere dalla quota del punto A. Se indichiamo con R il raggio della pista circolare e con r quello del corpo, il raggio della traiettoria circolare descritta da P nel corso del giro della morte vale $R - r$.

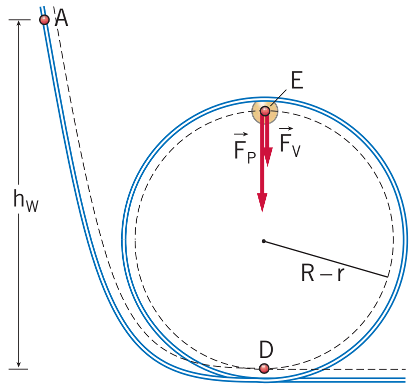


Figura 1 Un corpo rigido è lasciato cadere dalla quota *A* e, rotolando, deve completare il giro della morte.

Consideriamo ora l'istante in cui il baricentro del corpo che rotola si trova alla massima quota del giro della morte, nel punto E. Come nel caso del punto materiale, in generale la forza centripeta che agisce sul corpo è la somma della sua forza-peso $\vec{F}_P$ e della forza di reazione vincolare $\vec{F}_V$ dovuta alla pista su cui il corpo rotola.

Come nel primo caso, quindi, il minimo valore della forza centripeta $\vec{F}_C$ che agisce sul corpo in E è uguale alla forza-peso $\vec{F}_P$:

$$\vec{F}_C = \vec{F}_P.$$

Se indichiamo con v il modulo della velocità di traslazione del corpo rigido che si trova in E, in maniera analoga alla formula **(4)** dell'approfondimento «Giro della morte per un corpo che scivola» la formula precedente porta alla relazione

$$m\frac{v^2}{R - r} = mg, \tag{5}$$

da cui si trova

$$\boxed{v^2 = g(R - r)} \tag{6}$$

Così, l'energia cinetica di traslazione K_{tr} del corpo rigido in E vale

$$K_{tr} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mg(R - r). \tag{7}$$

L'energia cinetica di rotazione

Ora indichiamo il momento d'inerzia del corpo che rotola con l'espressione

$$I = wmr^2. \tag{8}$$

La tabella del paragrafo 10 del capitolo «La quantità di moto e il momento angolare» mostra che il coefficiente w vale 2/5 per la sfera, 1/2 per il cilindro pieno e 1 per il guscio cilindrico.

Dalla formula **(22)** dello stesso paragrafo vediamo che l'energia di rotazione K_{rot} di un corpo che ruota attorno al proprio asse di simmetria è

$$K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2;$$

per la (**8**) questa energia cinetica di rotazione può quindi essere scritta come

$$K_{rot} = \frac{1}{2} wmr^2\omega^2 = \frac{1}{2} wm(\omega r)^2. \qquad \textbf{(9)}$$

Ora possiamo ricordare che il moto di rotolamento è la sovrapposizione di un moto di traslazione con velocità di modulo v e di un moto di rotazione attorno al baricentro con velocità $\omega r = v$. Sulla base di questa uguaglianza possiamo scrivere l'energia cinetica di rotazione come

$$K_{rot} = \frac{1}{2} wm(\omega r)^2 = \frac{1}{2} wmv^2 = \frac{1}{2} wmg(R-r) \qquad \textbf{(10)}$$

e l'energia cinetica totale K del corpo che rotola risulta essere

$$K = K_{tr} + K_{rot} = \frac{1}{2} mg(R-r) + \frac{1}{2} wmg(R-r) = \frac{1}{2} mg(1+w)(R-r) \qquad \textbf{(11)}$$

Determinazione della quota di partenza

Come si è detto in precedenza, anche nel caso del rotolamento puro l'energia meccanica si conserva. Possiamo quindi ora determinare la quota minima di partenza h_w da cui deve essere lasciato cadere il corpo rigido se vogliamo che concluda il giro della morte.

L'altezza h_w è misurata a partire dalla quota del punto D, che corrisponde al punto più basso attraversato dal baricentro del corpo rigido nel suo moto. È allora conveniente porre alla quota di D il livello di zero dell'energia potenziale della forza-peso. Notiamo poi che il punto E si trova a un'altezza $2(R - r)$ al di sopra di D. In questo modo la conservazione dell'energia meccanica

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

diviene

$$mgh_w = 2mg(R-r) + \frac{1}{2} mg(1+w)(R-r) = mg(R-r)\frac{5+w}{2},$$

da cui si ottiene il risultato finale

$$h_w = \frac{5+w}{2}(R-r) \qquad \textbf{(12)}$$

Come controllo di coerenza, possiamo notare che per $r = 0$ m e $w = 0$ (cioè quando il corpo rigido si riduce a un punto materiale) il risultato (**12**) diviene identico al valore $h = 5R/2$ trovato per un punto materiale che scivola senza attrito.

ESERCIZI

DOMANDE SUI CONCETTI

1 ★☆☆ Sono dati un cilindro pieno, un guscio cilindrico e una sfera, tutti con la stessa massa e lo stesso raggio.

▶ Quale di essi deve essere lasciato cadere, da fermo, dalla quota più alta per riuscire a superare il giro della morte? [Il guscio cilindrico]

2 ★☆☆ Una boccia di raggio $r = 3{,}8$ cm rotola in orizzontale. Il modulo della velocità del suo baricentro è $v = 1{,}3$ m/s.

▶ Calcola la velocità angolare di rotolamento della boccia attorno al punto di contatto istantaneo con il terreno, la velocità angolare di rotazione della boccia attorno al suo baricentro e il valore della velocità istantanea di rotolamento del punto nella boccia che si trova alla quota più alta.

[34 rad/s, 34 rad/s, 2,6 m/s]

3 ★☆☆ Un cilindro pieno di raggio $r = 2{,}3$ cm rotola senza strisciare in modo da superare un giro della morte su una pista circolare che ha raggio $R = 18{,}4$ cm.

▶ Calcola la minima quota a cui si deve trovare, alla partenza, il baricentro del cilindro in modo da riuscire a superare il giro della morte.

[44,3 cm]

4 ★★☆ Un guscio cilindrico di raggio $r = 7{,}8$ cm è lasciato cadere in modo da superare, con la minima velocità possibile, un giro della morte definito da una guida rigida di raggio $R = 37{,}9$ cm. Calcola quanto valgono:

▶ La quota di partenza del baricentro del cilindro, rispetto al punto più basso raggiunto dal baricentro stesso nella discesa;

▶ la velocità di traslazione del baricentro del cilindro nel punto di massima quota del giro della morte (utilizza il valore $g = 9{,}80\ \text{m/s}^2$);

▶ la velocità angolare di rotolamento del cilindro nello stesso punto.

[0,903 m, 1,72 m/s, 22,1 rad/s]

5 ★★★ Una sfera di raggio $r = 4{,}1$ cm è lasciata cadere dalla minima quota necessaria per superare un giro della morte in cui il raggio della pista è $R = 21{,}7$ cm.

▶ Determina la velocità di traslazione e la velocità angolare di rotazione della sfera quando il suo baricentro si trova nel punto più basso della sua traiettoria. (Utilizza il valore $g = 9{,}80\ \text{m/s}^2$.)

[2,58 m/s, 62,9 rad/s]