IL CONDENSATORE CILINDRICO

Consideriamo un condensatore cilindrico, che è costituito da due cilindri conduttori molto lunghi rispetto al loro raggio, coassiali e isolati tra loro. Inoltre, il cilindro esterno è collegato a terra. In questa condizione, la stessa dimostrazione esposta per il condensatore sferico nel paragrafo 7 del capitolo «Fenomeni di elettrostatica» ci porta ad affermare che

> nel condensatore cilindrico avviene il fenomeno dell'*induzione completa*: se il cilindro interno è elettrizzato con una carica Q, su quello esterno si porta una carica elettrica $-Q$.

Per fissare le idee, nella trattazione che segue la carica Q è considerata positiva. Inoltre indichiamo con ε la costante dielettrica assoluta dell'isolante posto tra i cilindri, con R_1 il raggio del cilindro più interno, con R_2 il raggio del cilindro esterno e con L la lunghezza dei due cilindri.

Proprietà geometriche del campo elettrico all'interno del condensatore

Molto minore e molto maggiore
I due simboli $\ll$ e $\gg$, molto usati in fisica, significano rispettivamente «molto minore» e «molto maggiore».

Sulla base di quanto è detto sopra, valgono le relazioni

$$R_1 \ll L \quad \text{e} \quad R_2 \ll L, \tag{1}$$

per cui ha senso modellizzare il problema come se i due cilindri avessero lunghezza infinita. In questo modo la carica elettrica si dispone in modo omogeneo sulle due armature ed è possibile ripetere identica la dimostrazione (nel paragrafo 8 del capitolo «Il campo elettrico») che riguarda il campo elettrico generato da una distribuzione rettilinea infinita omogenea di carica elettrica.

Ciò porta alla determinazione delle proprietà geometriche del vettore campo elettrico nello spazio tra i due cilindri. In particolare, si trova che:

> - in ogni punto, il campo elettrico è perpendicolare all'asse di simmetria dei cilindri;
> - in punti alla stessa distanza r da tale asse di simmetria (con $R_1 \leq r \leq R_2$) il vettore campo elettrico ha lo stesso modulo $E(r)$.

Il modulo del campo elettrico tra le armature cilindriche

Le proprietà geometriche appena enunciate suggeriscono che è conveniente determinare il valore di $E(r)$ utilizzando una superficie gaussiana Ω che ha la forma di un cilindro di raggio r, con lo stesso asse delle due armature e di lunghezza L **(figura 1)**.

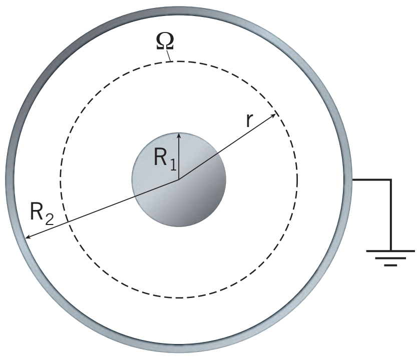

Figura 1 La superficie gaussiana Ω ha la forma di un cilindro di raggio *r*, coassiale alle armature del condensatore.

In questo caso, possiamo ancora una volta sfruttare l'impostazione già vista nel caso del «filo» di carica (figura 28 nel paragrafo 8 del capitolo «Il campo elettrico») e trovare così che il flusso di campo elettrico $\Phi_\Omega(\vec{E})$ attraverso Ω è dato dalla formula

$$\Phi_\Omega(\vec{E}) = 2\pi L r E(r). \tag{2}$$

Ora possiamo ricordare la legge di Gauss per il campo elettrico

$$\Phi_\Omega(\vec{E}) = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon}; \tag{3}$$

visto che, nel caso che stiamo esaminando, si ha $Q_{tot} = Q$, uguagliando i secondi membri delle formule **(2)** e **(3)** otteniamo:

$$2\pi L r E(r) = \frac{Q}{\varepsilon}.$$

Da questa relazione si può isolare il modulo del campo elettrico, che risulta:

$$\boxed{E(r) = \frac{1}{2\pi L\varepsilon}\frac{Q}{r}} \tag{4}$$

Notiamo che il rapporto Q/L è analogo alla densità lineare di carica elettrica λ nel «filo di carica»; allora, se confrontiamo la formula **(4)** appena ottenuta con la formula **(21)** del capitolo «Il campo elettrico» vediamo che

il campo elettrico generato da una distribuzione cilindrica omogenea di carica è, nei punti esterni alla distribuzione stessa, uguale a quello che ci sarebbe negli stessi punti se tutta la carica fosse concentrata nell'asse di simmetria del cilindro.

Calcolo della differenza di potenziale ai capi del condensatore

Consideriamo ora una traiettoria rettilinea L che collega l'armatura interna del condensatore con quella esterna rimanendo sempre radiale rispetto all'asse di simmetria del sistema. Per quanto detto in precedenza (e considerando Q positivo) l'elemento di linea infinitesimo $\vec{dl}$ lungo questa linea è in ogni punto parallelo al campo elettrico $\vec{E}(r)$ in quel punto.

Allora, per la formula (**13**) del capitolo «Il potenziale elettrico», la differenza di potenziale infinitesima $dV(r)$ ai capi di $d\vec{l}$ è data da:

$$dV(r) = -\vec{E}(r) \cdot d\vec{l} = -E(r)\,dr, \qquad (5)$$

dove dr è la lunghezza infinitesima del vettore $d\vec{l}$.

Su questa base possiamo calcolare la differenza di potenziale ΔV (positiva) tra le due armature sommando lungo il cammino L tutti gli incrementi infinitesimi dati dall'espressione (**5**). Otteniamo così l'integrale

$$\begin{aligned}\Delta V &= \int_{R_2}^{R_1} dV(r) = -\int_{R_2}^{R_1} E(r)\,dr = \int_{R_1}^{R_2} E(r)\,dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2\pi L\varepsilon}\frac{Q}{r}\,dr = \\ &= \frac{Q}{2\pi L\varepsilon}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r}\,dr.\end{aligned} \qquad (6)$$

Conviene allora calcolare a parte l'integrale definito

$$\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r}\,dr = \big[\ln|\,r\,|\big]_{R_1}^{R_2} = \ln R_2 - \ln R_1 = \ln\frac{R_2}{R_1}. \qquad (7)$$

Inserendo la (**7**) nella (**6**) otteniamo, quindi, il valore

$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi L\varepsilon}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r}\,dr = \frac{Q}{2\pi L\varepsilon}\ln\frac{R_2}{R_1} \qquad (8)$$

È facile verificare che, con $Q > 0$ e $R_2 > R_1$, il valore di ΔV dato dalla formula precedente risulta positivo.

La capacità del condensatore cilindrico

Possiamo ora derivare la capacità C del condensatore cilindrico. Infatti, sulla base della definizione $C = Q/\Delta V$ e del risultato (**8**) otteniamo:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\cancel{Q}}{\dfrac{\cancel{Q}}{2\pi L\varepsilon}\ln\dfrac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi L\varepsilon}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}} \qquad (9)$$

ESERCIZI

PROBLEMI

1 ★

Un condensatore cilindrico ha due armature di lunghezza $L = 6{,}8$ cm separate da un isolante con $\varepsilon_r = 4{,}3$. I raggi dei due cilindri valgono rispettivamente $R_1 = 1{,}1$ mm e $R_2 = 3{,}9$ mm e la carica sull'armatura interna è $Q = 72$ pC.

▶ Calcola il valore del campo elettrico presente in un punto posto a metà strada tra le superfici delle due armature. [$1{,}8 \times 10^3$ V/m]

2 ★★

Considera di nuovo i dati dell'esercizio precedente.

▶ Determina il valore della capacità del condensatore e quello della differenza di potenziale applicata a esso. [13 pF; 5,5 V]

3 ★★

Un condensatore cilindrico è lungo 4,7 cm e i raggi delle sue armature misurano, rispettivamente, 2,6 mm e 3,4 mm. Quando ai suoi capi è posta la differenza di potenziale $\Delta V = 27$ V, la carica sulla sua armatura positiva vale 0,97 nC. Calcola il valore:

▶ della capacità del condensatore;

▶ della costante dielettrica relativa dell'isolante posto tra le armature. [36 pF; 3,7]

4 ★★

Un condensatore di capacità $C = 5{,}52$ pF ha le armature cilindriche lunghe 9,09 cm e poste nel vuoto.

▶ Determina di quante volte il raggio dell'armatura esterna è maggiore del raggio di quella interna. [2,5]

5 ★★★

Considera il caso in cui i raggi R_1 e R_2 dei cilindri sono quasi uguali, con $R_2 = R_1 + d$ e $R_1 \gg d$. Dall'Analisi Matematica si dimostra che, per x piccolo, vale l'approssimazione $\ln(1 + x) \cong x$.

▶ Utilizza la precedente approssimazione per esprimere la capacità del condensatore cilindrico nel caso descritto nel testo.

▶ Dal punto di vista geometrico, a cosa corrisponde la quantità $2\pi R_1 L$?

▶ Indicata tale quantità con il simbolo A, a quale altra espressione si riduce la capacità del condensatore cilindrico quando è valida la condizione enunciata nel testo del problema?

[$C = 2\pi R_1 L\varepsilon/d$; la superficie laterale del cilindro interno; alla capacità del condensatore piano $C = \varepsilon A/d$]

6 ★★★

Esamina la capacità di un condensatore sferico nel caso descritto nell'esercizio precedente (cioè con $R = r + d$ e $d \ll r$).

▶ Definisci qual è la formula che esprime in modo approssimato la capacità del condensatore sferico nel caso sopra descritto.

▶ A quale altra espressione è analoga la formula così ricavata?

[$C = 4\pi\varepsilon r^2/d$; alla capacità del condensatore piano con $A = 4\pi r^2$]