IL VETTORE COME CLASSE DI EQUIVALENZA

Per formulare una definizione rigorosa del concetto di «vettore» sono necessarie delle conoscenze preliminari, che ora illustriamo.

> Dato un insieme A si chiama *relazione interna* (o semplicemente *relazione*) in A una legge che associa a un elemento a appartenente ad A uno o più elementi di A.

Se a_1 è legato ad a_2 da una relazione R (a_1 e a_2 sono elementi di A) si scrive a_1Ra_2; se, invece, tale relazione non sussiste si scrive $a_1 \not R a_2$.

Consideriamo, per esempio, l'insieme dei numeri reali e, in esso, la relazione «a è maggiore di b». Allora il numero $a = 5$ è in relazione con i numeri 1, $\sqrt{3}$, 2…, mentre non è in relazione con i numeri 6, 2π, 10^{20}…

Proprietà delle relazioni

Siamo interessati alla proprietà *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*.

Una relazione R in un insieme A gode della proprietà **riflessiva** se, per ogni elemento a appartenente ad A, vale la condizione aRa (cioè se ogni elemento è in relazione con se stesso).

Per esempio, se A è l'insieme dei prodotti presenti in un negozio, la relazione «avere lo stesso prezzo di» è riflessiva, in quanto ogni oggetto a ha lo stesso prezzo di se stesso. Nello stesso insieme, la relazione «stare nello scaffale al di sopra di» non è riflessiva, perché un oggetto *non* è nello scaffale superiore al proprio.

Una relazione R in un insieme A gode della proprietà **simmetrica** se, tutte le volte che a_1Ra_2 vale anche la condizione a_2Ra_1 (e se questo vale per tutti gli elementi di A).

Per esempio, se l'insieme A è una famiglia la relazione «essere fratello di» è simmetrica (se Roberto è fratello di Luigi, Luigi è senz'altro fratello di Roberto). Invece, la relazione «essere padre di» non è simmetrica (se Aldo è padre di Roberto, Roberto *non* è padre di Aldo).

Una relazione R in un insieme A gode della proprietà **transitiva** se, tutte le volte che a_1Ra_2 e a_2Ra_3 vale anche a_1Ra_3 (e se questo vale per tutti gli elementi di A).

Per esempio, se l'insieme A è dato dagli abitanti di Roma, la relazione «avere la stessa età» gode della proprietà transitiva (se Anna ha la stessa età di Beatrice e Beatrice ha la stessa età di Carla, di certo Anna ha la stessa età di Carla). Invece la relazione «essere amico di» non gode della proprietà transitiva: se Dante è amico di Emilio e Emilio è amico di Federico, non è detto che Dante sia amico di Federico.

Relazione di equivalenza

> Una relazione R in un insieme A si dice *di equivalenza* se gode delle tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Per esempio, nell'insieme A delle rette nello spazio la relazione «essere parallela a» è una relazione di equivalenza. Infatti:

- una retta è, per definizione, parallela a se stessa (proprietà riflessiva);
- se *r* è parallela a *s*, anche *s* è parallela a *r* (proprietà simmetrica);
- infine, se *r* è parallela a *s* e *s* è parallela a *t*, *r* è parallela a *t* (proprietà transitiva).

Classi di equivalenza

Una relazione di equivalenza *R* permette di suddividere un insieme *A* in sottoinsiemi che prendono il nome di *classi di equivalenza*.

Per esempio, se consideriamo una retta *r* dello spazio possiamo considerare l'*insieme di tutte le rette parallele a r (compresa r stessa)*. Questa è una classe di equivalenza. Ora, scegliamo una qualsiasi retta *s* non parallela a *r*. L'insieme di tutte le rette parallele a *s* forma una seconda classe di equivalenza.

Continuando a questa maniera possiamo dividere l'intero insieme *A* in classi. Esse soddisfano due proprietà fondamentali: 1) sono disgiunte, cioè due classi di equivalenza qualunque non hanno alcun elemento in comune; 2) la loro unione ricostruisce l'intero insieme *A*, cioè non vi è alcun elemento di *A* che non rientri in una di queste classi.

Insieme quoziente

Ogni classe di equivalenza definita da *R* in *A* può essere considerata *un elemento* di un nuovo insieme, che è chiamato *insieme quoziente* ed è di solito indicato con *A*/*R*.

Torniamo di nuovo all'esempio dell'insieme *A* delle rette dello spazio. In geometria, ogni classe di equivalenza in cui *A* è suddiviso dalla relazione di parallelismo è detta *direzione*. Quindi l'insieme quoziente è, in questo caso, l'*insieme delle direzioni nello spazio*.

In matematica, quindi, una *direzione* è un insieme di infinite rette parallele tra loro. Ognuna di queste rette è un *rappresentante* della direzione.

La definizione di vettore

Ora siamo in grado di esplicitare la definizione di vettore.

Di solito uno spostamento o una forza sono rappresentati mediante una *freccia*, cioè un *segmento orientato*. Consideriamo, ora, l'insieme *A* di *tutte* le frecce che possiamo definire nello spazio. Queste frecce possono differire tra loro per la lunghezza, la direzione, il verso o il punto di applicazione.

In questo insieme *A* introduciamo la relazione «essere equipollenti». Due frecce sono *equipollenti* se hanno la stessa direzione, lo stesso verso e la stessa lunghezza.

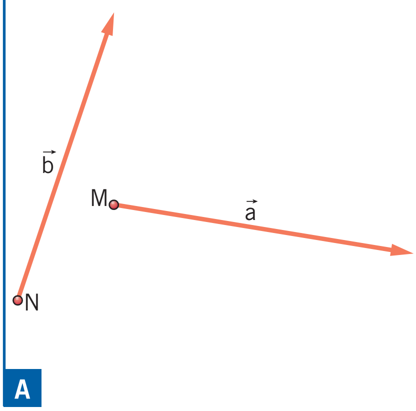
Puoi verificare che la relazione di equipollenza gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Quindi è una relazione di equivalenza e, come tutte le altre, suddivide l'insieme *A* in classi.

> Chiamiamo *vettori* le classi di equivalenza definite sull'insieme A di tutte le frecce dello spazio dalla relazione «essere equipollenti».

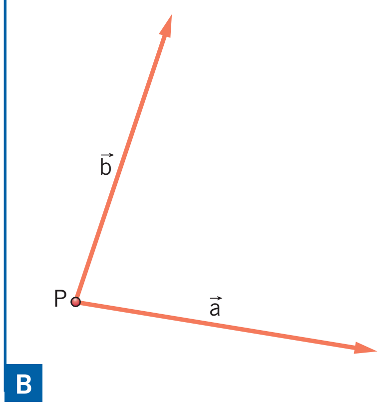
Ciò significa che due frecce che hanno lunghezza, direzione e verso uguali, ma diversi punti di applicazione *sono due diversi rappresentanti dello stesso vettore*.

Ripensiamo ora a un'operazione sui vettori, per esempio all'operazione di somma.

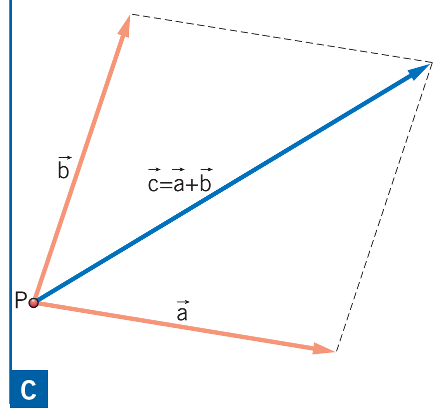
▶ Le due frecce disegnate sono due rappresentanti dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, che sono applicati rispettivamente nei punti M e N.



▶ Per la somma, scegliamo altri due rappresentanti dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, due frecce che sono entrambe applicate nel punto P.



▶ La somma di $\vec{a}$ e $\vec{b}$ fornisce la freccia azzurra applicata in P. Il vettore $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ è l'insieme delle infinite frecce equipollenti a essa.



ESERCIZI

DOMANDE SUI CONCETTI

1 ★☆☆ Nell'insieme dei numeri interi maggiori di 1, due numeri sono collegati dalla relazione R_1 se ammettono un divisore comune (diverso dal numero 1).

▶ Stabilisci se R_1 è:

- riflessiva;
- simmetrica;
- transitiva.

2 ★☆☆ Nell'insieme dei numeri naturali due numeri sono collegati dalla relazione R_2 se, divisi per 5, danno lo stesso resto della divisione.

▶ Stabilisci se R_2 è:

- riflessiva;
- simmetrica;
- transitiva.

3 ★☆☆ Se la relazione R_2 dell'esercizio precedente è una relazione di equivalenza, descrivi le classi di equivalenza definite da R_2 nell'insieme dei naturali.