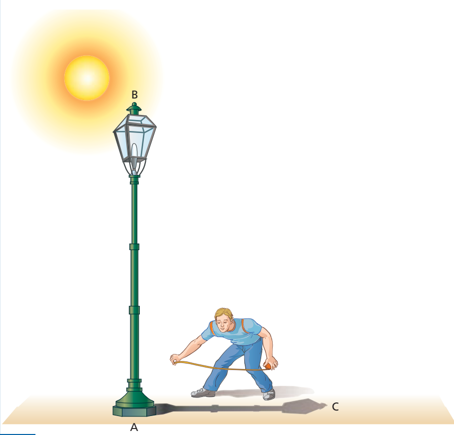
LA MISURA DI GRANDI DISTANZE CON LA TRIANGOLAZIONE

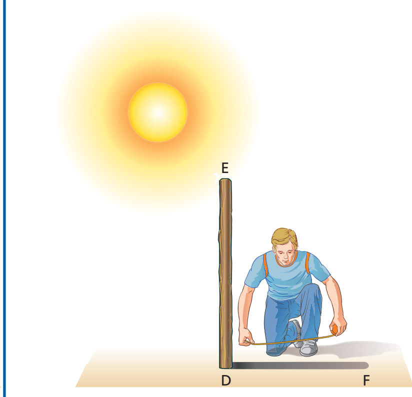
Come si può misurare l'altezza di un lampione senza doversi arrampicare su di esso? Se è una giornata di sole, è possibile sfruttare l'ombra del lampione.

▶ Con un metro a nastro si misura la lunghezza dell'ombra del lampione.



A

▶ Subito dopo si misura l'altezza di un paletto e la lunghezza della sua ombra.



B

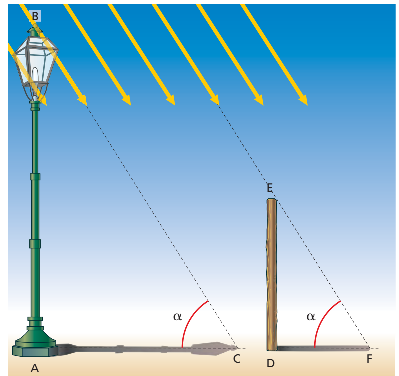


Figura 1 Il triangolo che ha per cateti l'altezza del lampione e la sua ombra è simile a quello che ha per cateti l'altezza del paletto e la sua ombra.

Nella **figura 1** i due triangoli rettangoli *ABC* (i cui cateti sono il lampione e la sua ombra) e *DEF* (formato dal paletto e dalla sua ombra) sono simili perché i due angoli indicati con α sono uguali visto che sono dovuti all'inclinazione dei raggi solari, che è la stessa nei due casi. Così si può impostare la proporzione

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DE} : \overline{DF}\,,$$

da cui si ricava l'altezza del lampione $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \overline{DE}\,\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}\,.$$

Questa misura dell'altezza del lampione è un esempio di *triangolazione*.

La **triangolazione** permette di ricavare la misura di una lunghezza incognita grazie alle proprietà geometriche dei triangoli.

Nei casi più semplici, come quello del lampione, il triangolo utilizzato per la misurazione è rettangolo. Ma si possono usare triangoli di forma qualunque, anche se la matematica che si deve utilizzare è più complessa. In tutti i casi è indispensabile la conoscenza di un lato del triangolo, detto **base**, che deve essere misurato con grande precisione.

La misura del raggio terrestre

Nel III secolo a.C. Eratostene di Cirene misurò il raggio della Terra. Egli sapeva che a Siene (una città dell'antico Egitto) a mezzogiorno del solstizio d'estate il Sole è esattamente a perpendicolo sulla città, quindi un bastone piantato in verticale nel terreno non ha ombra **(figura 2)**.

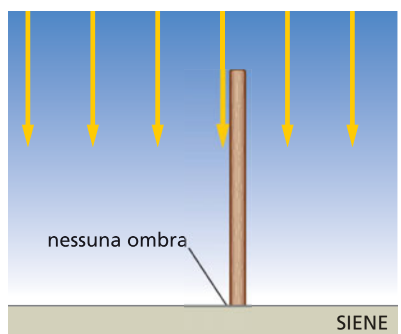


Figura 2 Il giorno del solstizio d'estate a Siene, in Egitto, i raggi solari sono perpendicolari alla superficie terrestre.

Nello stesso giorno Eratostene misurò l'ombra di un bastone ad Alessandria, una città che, secondo le sue conoscenze, si trovava a nord di Siene a una distanza di 5000 stadi. Grazie all'ombra del bastone egli stabilì che la direzione dei raggi solari formava un angolo di 7,2° con la verticale **(figura 3)**.
Come si vede dalla **figura 4**,

> nelle condizioni scelte da Eratostene, l'angolo α di inclinazione dei raggi solari ad Alessandria è uguale all'angolo al centro β formato dai raggi che uniscono il centro della Terra con le due città.

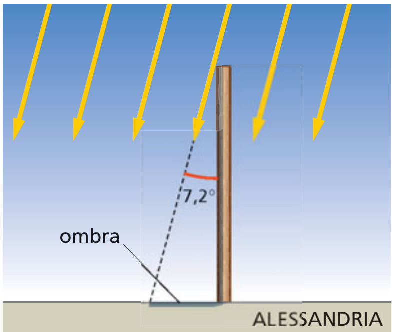


Figura 3 Il giorno del solstizio d'estate, ad Alessandria d'Egitto i raggi solari formano un angolo di 7,2° con la verticale.

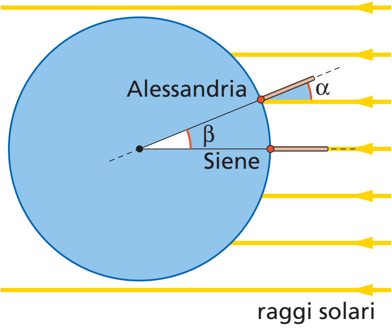


Figura 4 Gli angoli α e β sono uguali perché angoli corrispondenti di due rette parallele tagliate da una trasversale.

È quindi possibile impostare la proporzione

$$\text{(circonferenza terrestre)} : \text{(distanza Siene-Alessandria)} = \\ = \text{(angolo giro)} : (\text{angolo } \beta),$$

da cui si ottiene

$$\text{(circonferenza terrestre)} = \text{(distanza Siene-Alessandria)} \times \frac{\text{(angolo giro)}}{(\text{angolo } \beta)} =$$

$$= (5000 \text{ stadi}) \times \frac{360^\circ}{7{,}2^\circ} = 2{,}5 \times 10^5 \text{ stadi}.$$

Sulla base di testi antichi si ritiene che uno stadio equivalga a 156 m, perciò la circonferenza terrestre trovata da Eratostene risulta

$$(2{,}5 \times 10^5) \times (156 \text{ m}) = 3{,}9 \times 10^7 \text{ m},$$

un risultato straordinariamente simile a quello accettato oggi $(4{,}01 \times 10^7 \text{ m})$.

Le distanze della Luna e del Sole dalla Terra

Conoscendo le dimensioni della Terra diventa possibile misurare la distanza Terra-Luna con il metodo della triangolazione.

La **figura 5** mostra in modo schematico il triangolo *ABC*, che ha il vertice *B* nel centro del disco lunare e i vertici *A* e *C* in due località molto lontane tra loro ma disposte sullo stesso meridiano terrestre. La base $\overline{AC}$ è nota, perché è calcolata a partire dalla conoscenza del valore della circonferenza terrestre.

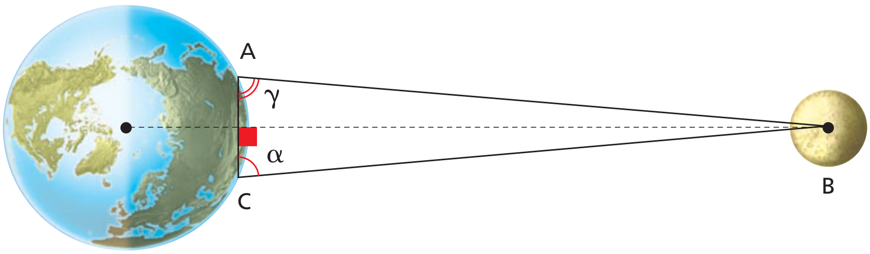


Figura 5 Metodo della triangolazione per misurare la distanza Terra-Luna.

> Conoscendo la base $\overline{AC}$ e misurando da Terra gli angoli α e γ è possibile calcolare la distanza tra il centro della Terra e il centro della Luna.

Questa distanza vale 384 400 km. Oggi, grazie a un particolare specchio lasciato sulla Luna dagli astronauti dell'Apollo 11, è possibile misurare la distanza Terra-Luna rilevando il tempo che un impulso laser, partito da Terra, impiega a riflettersi sullo specchio lunare e a tornare al punto di partenza.

Il metodo è così preciso che è possibile stabilire che la distanza media Terra-Luna aumenta di 3,8 cm ogni anno.

Basato essenzialmente su una triangolazione è anche il metodo per misurare la distanza Terra-Sole. Si è trovato che il valore medio di tale distanza è $1{,}50 \times 10^{11}$ m; questa grandezza è chiamata **Unità Astronomica** (UA).

ESERCIZI

DOMANDE SUI CONCETTI

1 ★☆☆ **Test.** Quale tra i seguenti elementi non fu usato da Eratostene per calcolare la lunghezza della circonferenza terrestre?

A Una proporzione tra archi di circonferenza e angoli al centro corrispondenti.

B Una proporzione tra gli elementi di due triangoli simili.

C La distanza tra Alessandria e Siene.

D L'angolo tra i raggi solari e un bastone piantato in terra.

2 ★☆☆ La distanza dal Sole di Plutone, il pianeta più lontano, vale $5{,}91 \times 10^{12}$ m.

▶ Esprimi questa distanza in UA.

[39,4 UA]

3 ★☆☆ **PROBLEMA SVOLTO**

Una turista alta 1,68 m visita Piazza del Popolo, a Roma, dove si trova un obelisco. La turista misura la lunghezza dell'ombra dell'obelisco (compresa la sua base), che risulta 17,9 m. Subito dopo è misurata l'ombra della turista, che risulta lunga 0,81 m.

▶ Qual è l'altezza dell'obelisco (compresa la base su cui poggia)?

	Grandezze	Simboli	Valori	Commenti
Dati	Altezza della turista	$\overline{DE}$	1,68 m	
	Lunghezza dell'ombra della turista	$\overline{DF}$	0,81 m	
	Lunghezza dell'ombra dell'obelisco	$\overline{AC}$	17,9 m	
Incognite	Altezza dell'obelisco	$x = \overline{AB}$	?	

Ragionamento

- Si tratta di una misura mediante triangolazione, perché i due triangoli rettangoli *ABC* e *DEF* sono simili.

Risoluzione

Scriviamo la proporzione tra i due triangoli $x : \overline{AC} = \overline{DE} : \overline{DF}$

Ricaviamo x nella proporzione $x = \dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{DE}}{\overline{DF}}$

Sostituiamo nella soluzione i valori numerici $x = \dfrac{(1{,}68\ \text{m}) \cdot (17{,}9\ \text{m})}{0{,}81\ \text{m}} = 37\ \text{m}$

Controllo del risultato

La punta dell'obelisco di Piazza del Popolo si trova a 36,5 m da terra. Con due cifre significative, il risultato di 37 m è in accordo con tale dato.

4 ★☆☆ Per conoscere l'altezza di un albero, un ragazzo alto 1,74 m misura la lunghezza della sua ombra, che risulta 2,45 m. Poi misura la lunghezza dell'ombra dell'albero, ottenendo 5,60 m.

▶ Quale valore trova il ragazzo per l'altezza dell'albero?

[3,98 m]

5 ★☆☆ La circonferenza terrestre è lunga $4{,}01 \times 10^7$ m. Vuoi conoscere la distanza tra due città, A e B, poste sullo stesso meridiano. Quando un bastone piantato in terra in A non fa ombra, misuri l'angolo fatto in B dai raggi solari con la direzione verticale, trovando 5°.

▶ Qual è la distanza tra le due città?

[557 km]