IL PRODOTTO SCALARE IN COORDINATE CARTESIANE

Vediamo come si può esprimere il prodotto scalare tra due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ attraverso le loro componenti cartesiane. Disegniamo su un piano cartesiano i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, mettendo in evidenza le loro componenti cartesiane e gli angoli α e β che essi formano con l'asse delle x **(figura 1)**.

Scriviamo ora l'espressione del prodotto scalare $\vec{u} \cdot \vec{v}$ mediante la **formula 5.2**, osservando che l'angolo compreso tra i due vettori non è altro che $(\alpha - \beta)$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\cos(\alpha - \beta)$$

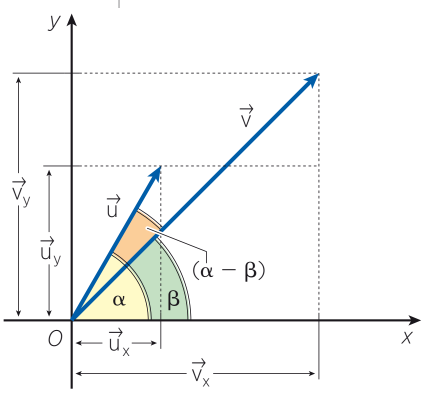

Figura 1. Componenti cartesiane dei vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ rappresentati sullo stesso piano cartesiano.

Dalle formule della trigonometria sappiamo che

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta$$

dunque:

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,(\cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta) = \\ &= |\vec{u}|\,\cos\alpha\,|\vec{v}|\cos\beta + |\vec{u}|\sin\alpha\,|\vec{v}|\sin\beta\end{aligned}$$

Osservando che

$$\begin{aligned}u_x &= |\vec{u}|\cos\alpha; \quad & u_y &= |\vec{u}|\sin\alpha \\ v_x &= |\vec{v}|\cos\beta; \quad & v_y &= |\vec{v}|\sin\beta\end{aligned}$$

possiamo scrivere:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x\,v_x + u_y\,v_y$$

Cioè

il prodotto scalare tra due vettori del piano si ottiene sommando tra loro i prodotti delle componenti omologhe.

Il risultato può essere esteso al caso più generale di vettori a n dimensioni e in particolare, nello spazio euclideo tridimensionale abbiamo:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x\,v_x + u_y\,v_y + u_z\,v_z$$

ESEMPIO

Utilizzando le componenti cartesiane, calcola il prodotto scalare tra i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ che formano rispettivamente angoli di 60° e di 30° con l'asse x e i cui moduli sono

$$|\vec{u}| = 8{,}0$$
$$|\vec{v}| = 2{,}6$$

Calcoliamo innanzitutto le componenti cartesiane dei due vettori:

$$u_x = |\vec{u}|\cos\alpha = 8{,}0\,\cos 60° = 4{,}0$$
$$u_y = |\vec{u}|\sin\alpha = 8{,}0\,\sin 60° = 6{,}9$$

$$v_x = |\vec{v}| \cos\beta = 2{,}6 \cos 30° = 2{,}3$$
$$v_x = |\vec{v}| \sin\beta = 2{,}6 \sin 30° = 1{,}3$$

Quindi:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y = 4{,}0 \times 2{,}3 + 6{,}9 \times 1{,}3 = 18$$

DOMANDA Verifica che tale risultato è equivalente a quello ottenuto utilizzando la **formula 5.2**.