

MATEMATICA

La parabola

La parabola fa parte delle cosiddette «coniche», cioè di quelle curve che si ottengono immaginando di «affettare» un cono circolare retto, intersecandolo con piani di diversa inclinazione. In generale esse sono di quattro tipi, circonferenza, ellisse, parabola e iperbole, a seconda dell'angolo che il piano forma con l'asse del cono. Sia ϕ l'angolo che il piano forma con l'asse del cono e θ l'angolo di apertura del cono, cioè l'angolo formato da una qualsiasi direttrice e l'asse:

- se $\phi > \theta$ allora la curva è un'ellisse, con il caso particolare in cui ϕ sia un angolo retto e la curva è una circonferenza;
- se $\phi = \theta$ allora la curva è una parabola;
- $\phi < \theta$ allora la curva è un'iperbole.

Parabole luminose

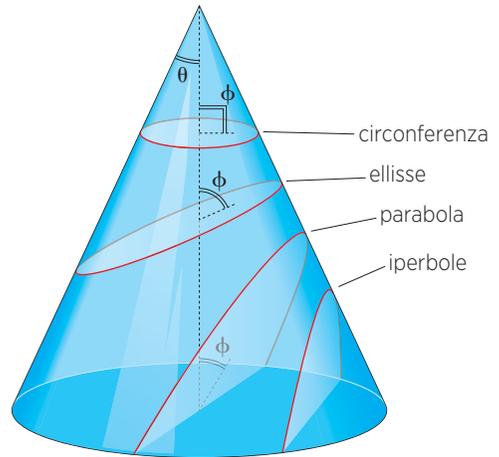
Per farci un'idea di come è prodotta una conica possiamo aiutarci con un semplice esperimento casalingo. Servono soltanto una torcia elettrica per generare un cono luminoso e una parete per «affettarlo». L'asse della torcia corrisponde all'asse del cono: quando la puntiamo contro il muro perpendicolarmente ad esso otteniamo una circonferenza; inclinando leggermente la torcia vediamo proiettata un'ellisse e aumentando l'inclinazione vediamo l'ellisse allungarsi fino ad aprirsi. La prima curva aperta è proprio una parabola; continuando a variare l'inclinazione della torcia le curve che osserviamo sono iperboli.

Parabole d'acqua

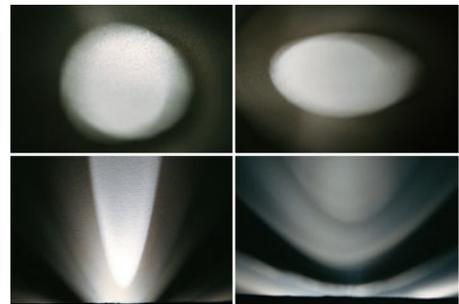
Le fontane con i loro giochi d'acqua ci offrono numerosi esempi di parabole: il moto dell'acqua spinta con una componente orizzontale e sottoposta all'azione della gravità è infatti parabolico, come si ricava dalla legge della composizione dei moti.



Fontana a Villa d'Este, vicino Roma.



Le curve coniche si ottengono intersecando la superficie di un cono retto con piani di diversa inclinazione.



Massimiliano Trevisan

Coniche formate dall'intersezione di un cono di luce con il piano di una parete: circonferenza, ellisse, parabola, iperbole.



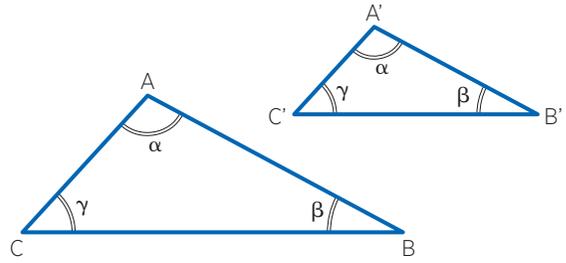
Oleksii Sagitov / Shutterstock

DOMANDA Perché i fuochi d'artificio assomigliano così tanto agli spruzzi delle fontane? Spiegalo in 5 righe.

MATEMATICA

Trigonometria

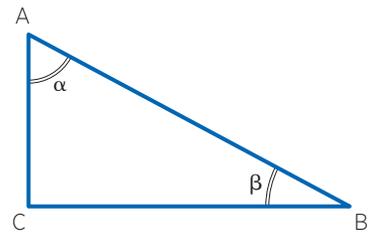
La trigonometria nasce per trovare le relazioni che legano fra loro lati e angoli di un triangolo. È facilmente intuibile: se prendiamo due triangoli simili, essi hanno tutti e tre gli angoli uguali e i lati in proporzione, cioè in rapporto costante.



Triangoli simili hanno gli angoli uguali e i lati proporzionali.

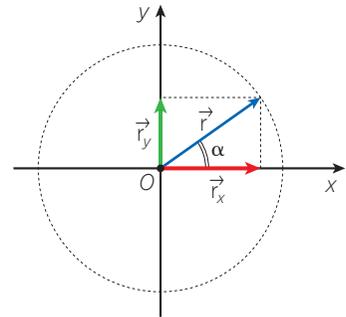
Funzioni trigonometriche

Se disegniamo un triangolo rettangolo e misuriamo ciascun cateto rispetto all'ipotenusa, cioè eseguiamo il rapporto fra queste lunghezze, otteniamo un valore tanto maggiore quanto più è ampio l'angolo opposto al cateto scelto. Tale valore è indipendente dalla lunghezza dei lati purché si considerino triangoli rettangoli simili. Il rapporto tra la lunghezza di un cateto BC e quella dell'ipotenusa AB è quindi una funzione dell'angolo α opposto a BC : tale funzione prende il nome di seno dell'angolo α . Il rapporto tra il cateto adiacente ad α e l'ipotenusa corrisponde a un'altra funzione trigonometrica, il coseno di α .



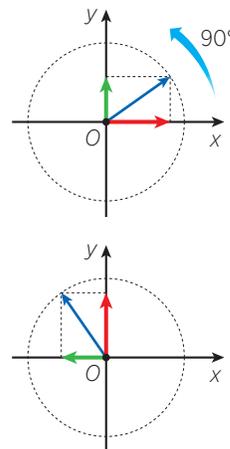
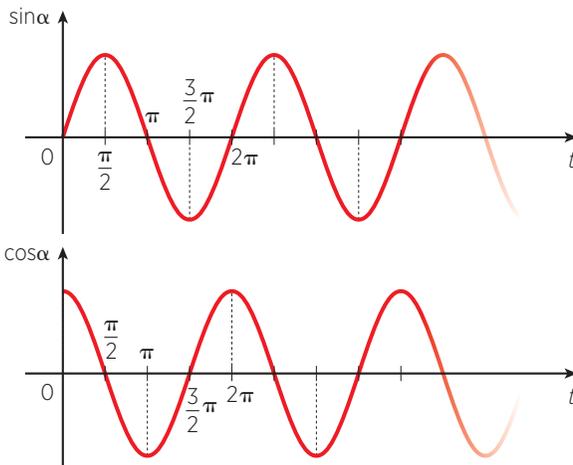
Circonferenza trigonometrica

Su una circonferenza di raggio unitario ($r = 1$) le funzioni trigonometriche $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ corrispondono rispettivamente alla proiezione del raggio vettore sull'asse y e sull'asse x , come è facile verificare dal disegno. Per questo motivo queste funzioni sono spesso usate nella descrizione di moti circolari, consentendo notevoli semplificazioni.



La sinusoide

Se riportiamo su un asse orizzontale i valori dell'angolo α e sull'asse verticale i valori della funzione $\sin \alpha$ otteniamo il grafico di una sinusoide. Il grafico della funzione $\cos \alpha$ è ancora una sinusoide, ma traslata di $\pi/2$: ruotando di un quarto di giro una circonferenza le funzioni seno e coseno scambiano i loro ruoli.



Le funzioni seno e coseno sono traslate l'una rispetto all'altra di un angolo retto.

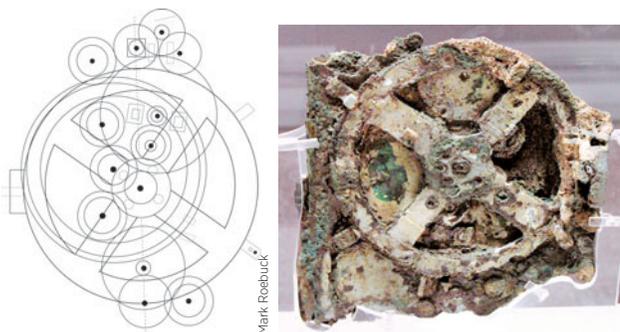
DOMANDA Sapresti dimostrare la cosiddetta identità fondamentale della trigonometria $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$? Utilizza il teorema di Pitagora.

CON GLI OCCHI DI UN FISICO

I meccanismi e il calcolo

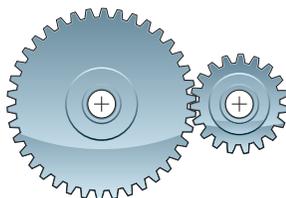
Il meccanismo di Anticitera

Nel 1900, presso l'isola di Anticitera, tra il Peloponneso e Creta, alcuni pescatori di spugne si imbararono in un antico relitto risalente al I secolo a.C. Durante le ricerche successive al ritrovamento venne alla luce un oggetto misterioso, che nascondeva degli ingranaggi tra le incrostazioni. La scoperta spiazzò tutti: non si immaginava che la tecnologia greca fosse così evoluta da produrre un meccanismo tanto sofisticato e complesso. Eppure recentissimi studi hanno confermato che il cosiddetto «meccanismo di Anticitera» appartiene proprio alla civiltà greca ed è in grado di riprodurre i moti degli astri con una serie di 37 ingranaggi tra ruote dentate, perni e lancette. Una specie di antico calcolatore capace di prevedere le eclissi e le fasi lunari, talmente complicato che ci sono voluti vent'anni per ricostruirlo. Sembra che tale tecnologia fosse in qualche modo legata a Siracusa, città di Archimede.



Gli ingranaggi del meccanismo di Anticitera erano in grado di riprodurre le 254 rivoluzioni della Luna con una ruota e contemporaneamente i 19 anni solari con un'altra ruota.

In un ingranaggio costituito da due ruote dentate il rapporto tra le velocità angolari è detto rapporto di trasmissione



PAROLA CHIAVE **Composizione dei moti**

DOMANDA Il meccanismo di Anticitera riproduce le periodicità dei moti degli astri attraverso la composizione di moti circolari uniformi.

- In quale modello dell'Universo si ritrova questo concetto?

Gli ingranaggi

Non c'è da stupirsi di quanto fosse evoluta la tecnologia greca se si pensa a quanta importanza aveva per i greci la matematica e che, in fondo, un meccanismo altro non è che un'applicazione della geometria. Per esempio, un ingranaggio formato da due ruote dentate di raggi diversi r ed r' che ingranano tra loro dal punto di vista meccanico trasforma il moto circolare dell'una nel moto circolare dell'altra, e dal punto di vista geometrico trasforma una circonferenza in un'altra circonferenza di diverso diametro. Mentre un punto del meccanismo descrive una circonferenza di raggio r , un altro punto descrive una circonferenza di raggio r' .

La pascalina

Sono sempre ingranaggi a ruote dentate che fanno funzionare la «pascalina», una calcolatrice meccanica capace di eseguire addizioni e sottrazioni con i riporti, inventata nel 1642 da Blaise Pascal, quando aveva appena 19 anni. Una manovella azionava il meccanismo e una serie di ruote dentate con i numeri da 0 a 9 iniziava a girare: ogni volta che la ruota delle unità arrivava a compiere un giro completo, la ruota delle decine scattava di un decimo di giro, e così via, fino a calcolare somme e sottrazioni con numeri dell'ordine delle centinaia di migliaia.



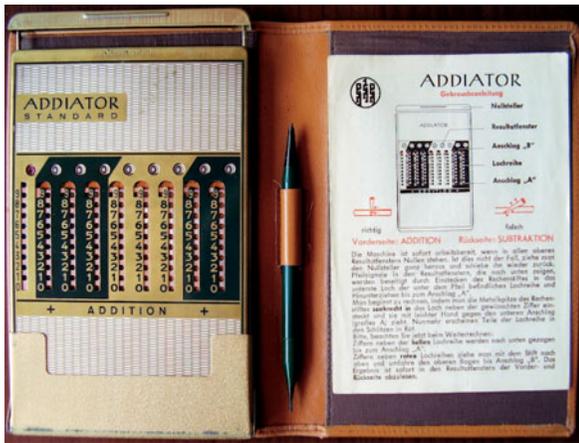
La pascalina del 1642 è una delle prime macchine per eseguire somme e sottrazioni mediante il movimento di organi meccanici.

PAROLA CHIAVE **Velocità angolare**

DOMANDA Se i raggi di una coppia di ruote dentate stanno tra loro in rapporto 1:2, in quale rapporto stanno tra loro le rispettive velocità angolari? Per rispondere supponi che la rotazione sia uniforme e che nel punto di contatto delle ruote la velocità tangenziale sia la stessa per entrambe.

Le calcolatrici a cremagliera

Grazie alla rivoluzione industriale, nell'Ottocento la produzione di meccanismi per il calcolo ebbe un rapido incremento. Tra la fine del XIX secolo e gli anni Sessanta del XX erano molto usate calcolatrici semplici e compatte, basate sul meccanismo della cremagliera, come la tedesca «Addiator», venduta in milioni di pezzi, sulla quale l'operatore agiva con un'astina che faceva scorrere gli ingranaggi. Una cremagliera è formata da una ruota dentata che scorre lungo un ingranaggio lineare: trasforma cioè un moto rettilineo in un moto circolare e viceversa; in termini di curve matematiche trasforma una retta in una circonferenza e viceversa.



Rock Poetry



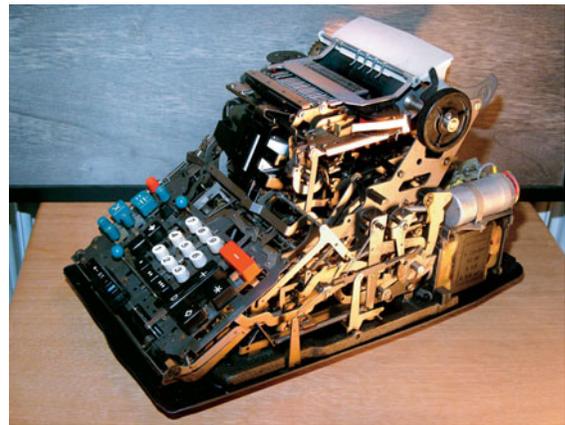
Vladimir/Shutterstock

La calcolatrice tascabile Addiator a cremagliera; una ruota dentata scorre su un ingranaggio rettilineo, operando reciproche trasformazioni tra moti lineari e moti circolari.

Operatrici meccaniche elettriche

Dagli anni Sessanta sono apparse le prime calcolatrici in grado di svolgere automaticamente e velocemente tutte e quattro le operazioni, stampando il risultato su un nastro di carta. Una gloria dell'industria italiana Olivetti, la «divisumma», fu un successo mondiale: alimentata da un motore elettrico, riceveva l'input da una tastiera ed eseguiva le operazioni grazie a un intricato sistema di meccanismi tra cui perni, ruote e leve di ogni genere, che compivano ripetuti movimenti fino al risultato richiesto, che veniva stampato sulla carta.

All'epoca una divisumma, considerata peraltro una calcolatrice economica rispetto ai prezzi della concorrenza, costava poco meno di un'utilitaria. L'avvento dell'elettronica ha rivoluzionato il calcolo automatico: appena cinquant'anni più tardi con qualche euro è possibile acquistare minuscole calcolatrici infinitamente più potenti.



Hannes Grobe

La «divisumma» Olivetti ha la tastiera come una moderna calcolatrice, ma i calcoli sono eseguiti per mezzo di complicati sistemi meccanici anziché di circuiti elettronici.

PAROLA CHIAVE Moto circolare uniforme

DOMANDA Con quale velocità si muove il centro della ruota di una cremagliera rispetto all'ingranaggio lineare se la sua velocità angolare costante è di 10 rad/s e il suo raggio è $1,0 \text{ cm}$?