LA GITTATA

Immaginiamo di lanciare un proiettile da terra con una velocità $\vec{v}_0$ che forma un angolo di inclinazione θ rispetto all'orizzontale, come illustrato nella **figura 1**. A seconda del modulo v_0 della velocità e dell'angolo θ di inclinazione il proiettile percorre una certa distanza orizzontale d, detta *gittata*, a partire dal punto di lancio. In particolare la gittata è maggiore se v_0 è maggiore, mentre la dipendenza dall'angolo di inclinazione non è altrettanto immediata.

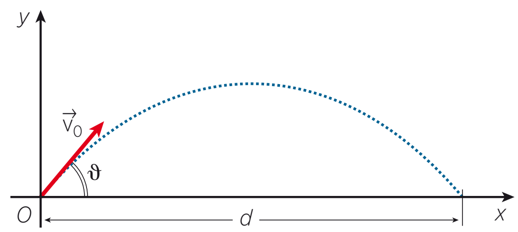

Figura 1. Un proiettile lanciato da terra con una velocità $\vec{v}_0$ che forma un angolo θ con l'asse delle x, percorre una traiettoria parabolica e raggiunge il suolo a una distanza d dal punto di lancio, detta gittata.

Osserviamo infatti che per angoli di inclinazione prossimi allo zero, il proiettile percorre una breve distanza prima di raggiungere il suolo e, inizialmente, al crescere dell'angolo di inclinazione, anche la gittata aumenta. Tuttavia, a un certo punto le cose iniziano ad andare in modo diverso: la gittata inizia a diminuire, fino ad annullarsi per un angolo di inclinazione pari a 90° **(figura 2a)**. La gittata è massima quando l'angolo θ è pari a 45° e intorno a tale valore si hanno situazioni simmetriche, cioè la gittata per $\theta = (45° + \alpha)$ è uguale alla gittata per $\theta = (45° - \alpha)$ **(figura 2b)**.

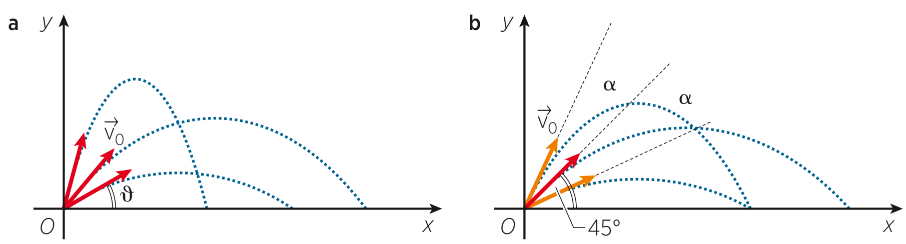

Figura 2.
a. Al variare dell'angolo di inclinazione θ cambia la gittata: a partire da un'inclinazione nulla, essa aumenta all'aumentare di θ, raggiunge un valore massimo e poi inizia a diminuire fino ad annullarsi per un'inclinazione pari a 90°.
b. La gittata è la stessa quando l'angolo θ è uguale a 45° ± α e quindi è massima per 45°.

L'intuizione è corretta ed è possibile dimostrarlo con semplici calcoli matematici.

Osserviamo innanzitutto che il moto del proiettile può essere scomposto nelle due direzioni, orizzontale e verticale, lungo le quali è rispettivamente rettilineo uniforme e rettilineo uniformemente accelerato. Scomponendo il modulo v_0 della velocità nelle due direzioni **(figura 3)**, si possono scrivere le due leggi orarie:

$$x = \mathrm{v}_{0x}\, t = v_0 \cos\theta\, t$$

$$y = v_{0y}\, t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

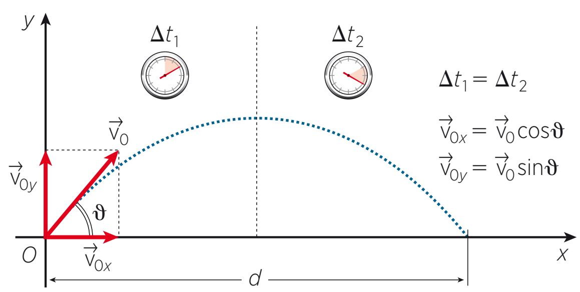

Figura 3. Relazioni trigonometriche che esprimono le componenti della velocità iniziale $\vec{v}_0$ lungo gli assi. La durata del moto verso l'alto è uguale alla durata del moto verso il basso.

La prima equazione permette di ricavare la gittata d in funzione del cosiddetto *tempo di volo* del proiettile Δt e dell'angolo di inclinazione θ.

$$d = v_0 \cos\theta \, \Delta t$$

Per ricavare l'angolo per il quale il valore di d è massimo si deve rendere l'espressione indipendente dal tempo, cioè bisogna esprimere Δt in funzione della velocità iniziale. Per semplificare i calcoli osserviamo che lungo y la velocità, dal valore v_{0y}, diminuisce fino ad azzerarsi alla quota massima, per poi aumentare e raggiungere nuovamente il valore v_{0y} e che la durata Δt_1 del moto ascendente è uguale alla durata Δt_2 del moto discendente **(figura 3)**.

Utilizzando la **formula 4.9** possiamo quindi scrivere la durata totale Δt del moto del proiettile nel seguente modo:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 2\Delta t = 2\frac{v_y}{g} = 2\frac{v_{0y}}{g}$$

$$\Delta t = 2\frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

dove g è l'accelerazione di gravità e v_y è la componente verticale della velocità con cui proiettile arriva al suolo, che risulta uguale alla velocità v_{0y} iniziale.

La gittata si può esprimere dunque mediante la relazione:

$$d = v_0 \cos\theta \frac{2v_0 \sin\theta}{g} = v_0^2 \frac{2\cos\theta \sin\theta}{g}$$

È noto in trigonometria che

$$2\cos\theta \, \sin\theta = \sin 2\theta$$

per cui

$$d = v_0^2 \frac{\sin 2\theta}{g} \qquad (1)$$

Fissato il modulo v_0 della velocità iniziale, tale espressione è massima quando $\sin 2\theta$ è massimo, cioè quando

$$2\theta = 90°$$
$$\theta = 45°$$

per il quale

$$d = \frac{v_0^2}{g} \qquad (2)$$

È dunque confermato quanto abbiamo ricavato precedentemente mediante un ragionamento qualitativo:

la gittata di un proiettile lanciato da terra è massima quando l'angolo di inclinazione della velocità $\vec{v}_0$ di lancio è pari a 45°.

ESEMPIO

Una pallina da golf viene lanciata da terra con una velocità di 40 m/s che forma un angolo di 45° con il terreno orizzontale. A quale distanza dal punto di lancio raggiunge il suolo?

SOLUZIONE Per un'inclinazione di 45° la gittata della pallina è massima e vale:

$$d = \frac{v_0^2}{g} = \frac{(40\ \text{m/s})^2}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = 1{,}6 \times 10^2\ \text{m}$$

DOMANDA A quale distanza dal punto di lancio la pallina raggiunge il suolo se l'angolo di inclinazione è 30°? Per quale altro valore dell'angolo di inclinazione si ottiene lo stesso risultato?